

sins auf der Kugel. Wir haben gezeigt, dass aber – anders als beim Torus und der Kugel – Flächen höheren Geschlechts höchstens 24 reguläre Dessins gleichen Typs besitzen können, die nach festen Regeln auseinander hervorgehen.^{12/}

Wie schon angedeutet, spielen quasiplatonische Flächen und ihre regulären Dessins oder Parkette für die arithmetisch interessanten Riemann'schen Flächen eine ähnliche Rolle wie das Periodensystem für die

Atome. Wie viele gibt es überhaupt davon? Mit zwei Henkeln gibt es genau drei verschiedene Flächen, auf denen insgesamt 11 verschiedene reguläre Dessins möglich sind, bei drei Henkeln (also $g = 3$) sind es acht verschiedene Flächen mit insgesamt 25 verschiedenen Parketten, eines davon in den Bildern 3 und 4 zu sehen, und für $g = 4$ gibt es bereits 11 Flächen und 28 Parkette. Mathematiker in der Slowakei und in Neuseeland lassen mit sportlichem Ehrgeiz ihre Computer heiß laufen, um zu sehen, wie es weitergeht: Wir kennen neuerdings solche Anzahlen bis zur Größenordnung von $g = 100$, sehen aus den neuesten Tabellen allerdings vor allem, dass sie sehr unregelmäßig anwachsen und von komplizierten arithmetischen Eigenschaften der Zahl g abhängen. Wächst g in astronomische Größenordnungen, dann gibt ein ebenfalls in Frankfurt gefundenes Resultat^{14/} wenigstens eine grobe Größenordnung für diese Anzahl: Sie wächst mit g schneller als jedes Polynom, aber langsamer als die Exponentialfunktion. Genauer gesagt lässt sich die Anzahl nach oben und unten durch Potenzen von $g^{\log g}$ eingrenzen.

Ebenso wie andere Wissenschaften wird auch Mathematik besonders faszinierend, wenn unerwartete Querverbindungen sichtbar werden, sei es zu Nachbarwissenschaften, sei es zwischen Teildisziplinen, die sonst wenig miteinander gemein haben. Hier sind es die geometrische Symmetrie regulärer Parkettierungen einerseits und die Arithmetik von Gleichungen andererseits – und vielleicht eines Tages die Grundlagen der Physik, wenn sich deren kühne Spekulationen bewahrheiten. ♦

Die Autoren

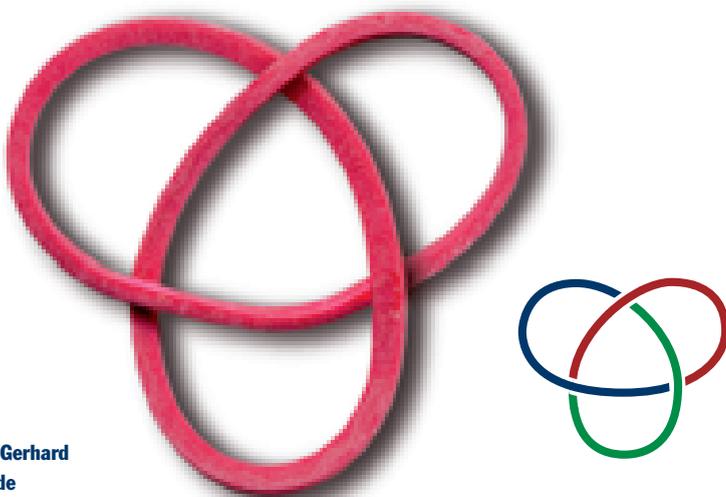
Dr. Ernesto Gironde, 34, hat 2001 an der Universidad Autónoma de Madrid promoviert und bald darauf eine fast zweijährige Postdoc-Zeit in Frankfurt bei der Arbeitsgruppe von Prof. Wolfart verbracht, zunächst mit einem Stipendium der spanischen Regierung, dann als Humboldt-Stipendiat. Er interessiert sich vor allem für Riemann'sche Flächen und hat auf diesem Gebiet eine Reihe von Veröffentlichungen vorzuweisen. Nach seiner Rückkehr hat er für das CSIC, eine bedeutende spanische Forschungsorganisation, gearbeitet und hat jetzt eine Professur an der Universidad Autónoma de Madrid inne. Seine gegenwärtigen Forschungsprojekte schlagen eine Brücke zwischen Geometrie, Algebra und Zahlentheorie.

Prof. Dr. Jürgen Wolfart, 63, studierte Mathematik und Physik in Hamburg und Freiburg, nach seiner Promotion und einem Postdoc-Jahr in Paris habilitierte er sich 1976 in Freiburg. 1979 wurde er an die Universität Frankfurt berufen. Er arbeitet über Riemann'sche Flächen und Zahlentheorie; zu seinen Veröffentlichungen gehört ein 1996 erschienenes Lehrbuch über »Zahlentheorie und Algebra«. Wolfart war 1986/87 Dekan und 2001 bis 2003 Studiendekan des Fachbereichs Mathematik, 2007 erhielt er den zweiten Preis für exzellente Lehre der 1822-Stiftung. Er pflegt wissenschaftliche Kontakte und Austauschprogramme mit Madrid, Southampton und Chiba (Japan).

ernesto.gironde@uam.es
 wolfart@math.uni-frankfurt.de
<http://www.math.uni-frankfurt.de/~wolfart>

Von echten und unechten Knoten

Ein Beweis mit drei Farben



von Gerhard Burde

Die Mathematiker verstehen unter einem »Knoten« eine geschlossene Raumkurve. Es handelt sich um einen »echten« Knoten, wenn diese nicht in eine ebene Kreislinie »deformierbar« ist. Der in Figur 1 abgebildete Knoten, eine »Kleeblattschlinge«, ist echt.

1 Die Kleeblattschlinge ist ein echter Knoten. Sie kann nicht durch irgendwelche Veränderungen ihrer Lage im Raum oder »Deformation«, wie der Mathematiker sagt, in einen ebenen Kreis überführt werden.

Dabei ist »Deformation« sinnfällig beschrieben, wenn man sich die Raumkurve als elastisches Seil vorstellt, das man beliebig deformieren darf, ohne das Seil zu zerstören. Die Knotentheorie ist für den Mathematiker deshalb interessant, weil sie Auskunft über topologische Eigenschaften des Raumes gibt. Die Existenz von echten Knoten im Raum – genauer im mathematischen Modell des physikalischen Raumes, im »Euklidischen« Raum – ist ein geometrisches Grundphänomen dieses Raumes.

Wir erfahren den physikalischen Raum mit unserer Wahrnehmung »lokal«, von unserem Standpunkt aus, und für unsere lokale Umgebung hat sich das Modell des Euklidischen Raumes gut bewährt. Ein Raum, der lokal überall so aussieht wie der Euklidische, wird eine (dreidimensionale) Mannigfaltigkeit genannt. Was ist damit gemeint? Für die Bewohner einer Kugeloberfläche sieht der Raum lokal wie eine flache Scheibe aus. Gleiches gilt aber auch für die Bewohner auf einer beliebigen an-

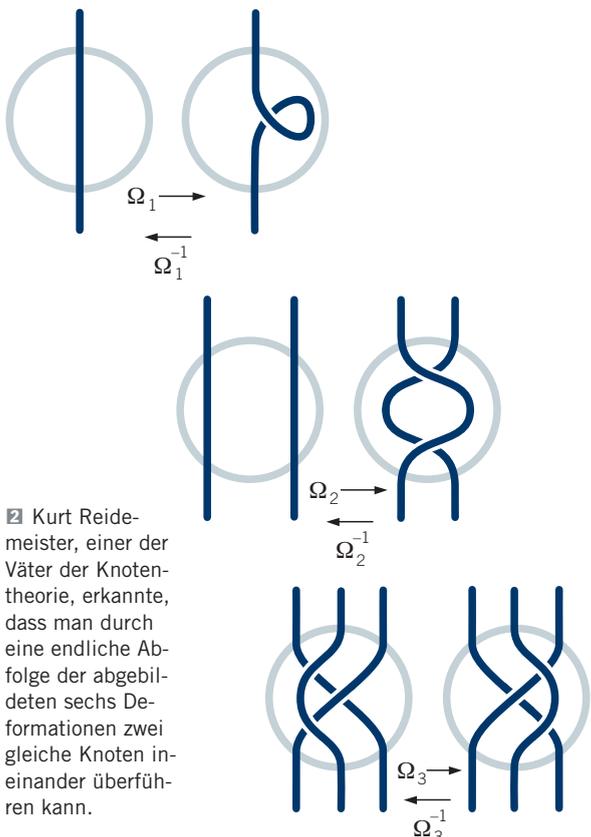
deren Fläche. Lokal betrachtet sehen alle diese Flächen gleich aus, weshalb man von Mannigfaltigkeit spricht.

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit kann als plausibles Raummodell für das Weltall gelten, wenn man von einzelnen »Singularitäten« einmal absieht. Die drei-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind in den letzten 100 Jahren intensiv erforscht worden, und es wurde gerade in letzter Zeit ein gewisser Abschluss erreicht – davon soll aber hier nicht die Rede sein. Uns sollen Knoten interessieren, die bei dem Studium von Mannigfaltigkeiten eine große Rolle spielen. Die »Knotentheorie« einer Mannigfaltigkeit, das heißt, ihre echten Knoten und deren Deformationen in ihr sind »globale« Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit. Sie kommen erst zum Tragen, wenn man sie als Ganzes betrachtet. Es gibt ein- und drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten, in denen eine Kleeblattschlinge kein echter Knoten ist. Auch die Dimension einer Mannigfaltigkeit hängt mit ihrer Knotentheorie zusammen: In der Euklidischen Ebene und in den Euklidischen Räumen einer Dimension > 3 gibt es keine echten Knoten.

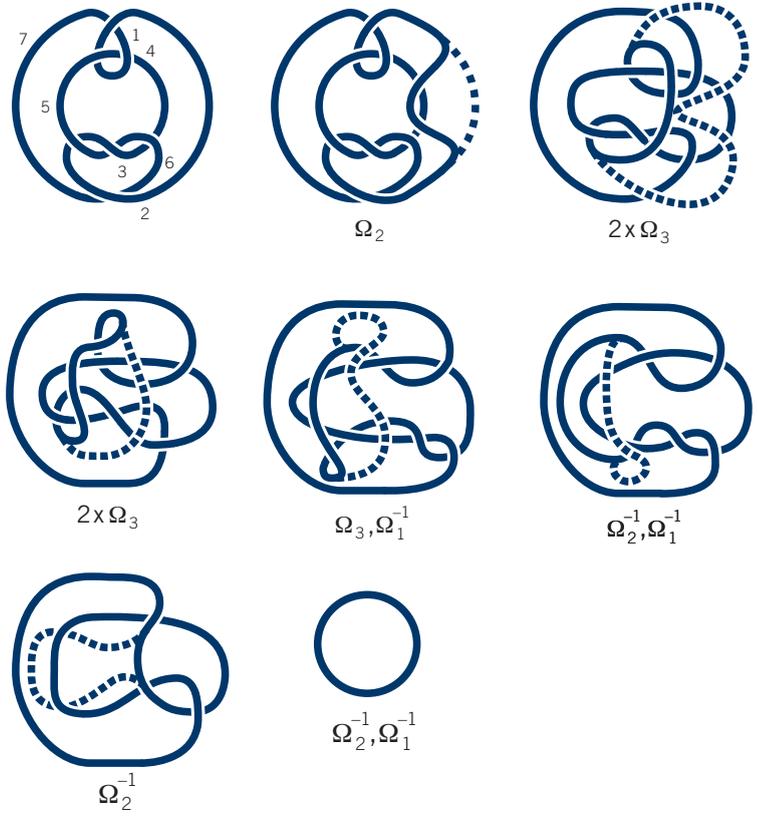
Die Hauptfrage der Knotentheorie ist: Wann sind zwei Knoten ineinander deformierbar? Tatsächlich gibt es einen Algorithmus, der diese Frage entscheidet – er überschreitet aber den Rahmen dieses Beitrags bei weitem. Auf diese Weise erhält man eine Klassifikation der Knoten. Kehren wir zur Kleeblattschlinge im drei-dimensionalen Raum zurück. Ist sie wirklich ein echter Knoten? Alle Versuche, sie in einen Kreis zu deformieren, schlagen fehl. Aber wie lässt sich zweifelsfrei beweisen, dass die Kleeblattschlinge ein echter Knoten ist?

Wie Mathematiker Knoten deformieren

Die Figur 1 stellt eine »Knotenprojektion« dar. Sie heißt »regulär«, weil sie nur endlich viele Kreuzungspunkte enthält. Man kann jede Projektion durch »kleine« Deformationen regulär machen. Im Allgemeinen



1 Kurt Reidemeister, einer der Väter der Knotentheorie, erkannte, dass man durch eine endliche Abfolge der abgebildeten sechs Deformationen zwei gleiche Knoten ineinander überführen kann.



2 Echter oder unechter Knoten? Mit Hilfe der Reidemeister-Prozesse lässt sich zeigen, dass das kompliziert aussehende Gebilde in einen Kreis überführt werden kann.

werden Deformationen des Knotens seine Projektionen stark verändern. Wir betrachten Typen solcher Veränderungen.

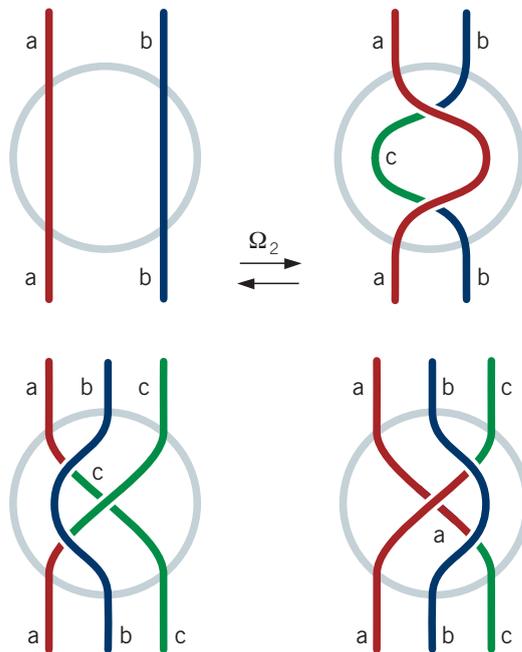
Die drei Prozesse Ω_i und ihre »Inversen« Ω_i^{-1} , $i = 1, 2, 3$, verändern die Projektionen »wesentlich«, das heißt, sie verändern die Zahl der Kreuzungspunkte ($\Omega_1^{\pm 1}$, $\Omega_2^{\pm 1}$) oder deren Lage zueinander ($\Omega_3^{\pm 1}$). Tatsächlich kommt man mit zwei von diesen sechs Prozessen aus, das heißt, zwei (reguläre) Knotenprojektionen gehören genau dann zum selben Knoten, wenn sie durch eine endliche Abfolge dieser Prozesse ineinander übergehen.^{1/2} Diese Überlegungen gehen auf Kurt Reidemeister (1893–1971) zurück, einen der Väter der Knotentheorie; die $\Omega_i^{\pm 1}$ heißen auch »Reidemeister-Prozesse«.

Wie weit tragen diese Prozesse? Kann man sie für einen Algorithmus nutzen, der entscheidet, ob zwei Projektionen zum selben Knoten gehören? Es gibt nur endlich viele reguläre Projektionen mit einer Anzahl von Überkreuzungen, die eine beliebige, aber fest gewählte Zahl nicht überschreiten. Leider kann sich die Zahl der Überkreuzungen während des Übergangs von einer (regulären) Projektion zu einer anderen desselben Knotens mit der $\Omega_i^{\pm 1}$ unkontrolliert erhöhen; eine

Der Autor

Prof. Dr. Gerhard Burde, 77, promovierte 1961 in Göttingen bei Kurt Reidemeister. Er war von 1971 bis 1996 Professor an der Goethe-Universität. Seine Forschungsschwerpunkte waren Knoten, Verkettungen, Zöpfe, 3-Mannigfaltigkeiten und ihre algebraischen Invarianten.

burde@math.uni-frankfurt.de



4 Beispiele zur nicht-trivialen Färbung von Knoten. Außerhalb des Kreises ändert sich die Färbung durch Anwendung eines Reidemeister-Prozesses nicht.

Schranke für diese Erhöhung ist nicht bekannt. Daher ist ein derartiger Algorithmus auf solch elementare Weise nicht gelungen. Die Figur 3 zeigt die Projektion eines Kreisknotens; man kann ihn leicht mit Reidemeister-Prozessen in die Kreislinie überführen – allerdings nur, wenn man zwischendurch die Anzahl der Kreuzungen vermehrt. Man erkennt dies daran, dass an der Figur 3 nur die Prozesse Ω_1 und Ω_2 überhaupt durchführbar sind, und diese vermehren die Kreuzungszahl.

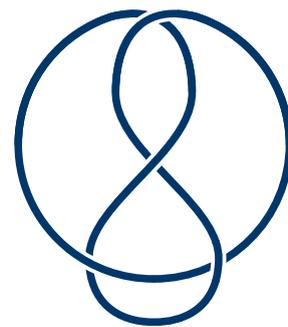
Die Färbung echter Knoten

Für den folgenden Beweis benötigen wir den Begriff des »Bogens«. In einer Projektion verstehen wir darunter ein Teilstück, das unterkreuzend an einer Kreuzung beginnt und bis zu der Kreuzung verläuft, wo es zum ersten Mal wieder unterkreuzt. Figur 4 enthält drei, Figur 5 sieben Bögen. Wir färben die Bögen mit den drei Farben a, b, c. Die Färbung heißt »zulässig«, wenn an jeder der Kreuzungen entweder alle drei oder nur eine der Farben auftritt. Eine zulässige Färbung ist »trivial«, wenn überhaupt nur eine Farbe verwendet wird; eine triviale zulässige Färbung ist natürlich immer möglich, eine nicht-triviale zulässige Färbung dagegen nicht. Offenbar lässt Figur 4 eine nicht-triviale Färbung zu, bei Figur 5 scheitern alle Bemühungen – wir werden gleich sehen, warum.

Satz: Lässt eine reguläre Knotenprojektion eine nicht-triviale Färbung zu, so ist sie die Projektion eines echten Knotens.

Zum Beweis zeigen wir: Eine nicht-triviale zulässige Färbung bleibt bei den Reidemeister-Prozessen erhalten! Da die Kreislinie nur die triviale Färbung zulässt, ist damit alles gezeigt. In Figur 2 markieren Kreise den Bereich, in dem die »lokalen« Ω_i -Prozesse stattfinden – außerhalb bleibt die Projektion unverändert. Ist die Färbung innerhalb der Kreise, in der die Veränderung der Projektion stattfindet, trivial, so bleibt sie dort trivial. Ist das nicht der Fall, so gilt: Man kann stets mit der $\Omega_i^{\pm 1}$ -Änderung die Färbung innerhalb des Kreises so (zulässig) ändern, dass außerhalb des Kreises alles beim Alten bleibt. Betrachten wir zwei Beispiele:

Offenbar treten nur wenige Fälle auf – bei denen die Farben anders verteilt sind – die Behauptung ist immer richtig; davon kann sich der Leser selbst überzeugen.



5 Nicht alle Knoten lassen sich durch die Färbungsmethode als echt erkennen, wie dieses Beispiel zeigt. Es existiert keine nicht-triviale Färbung und dennoch handelt es sich um einen echten Knoten.

Leider sind diesem Verfahren, einen Knoten als echt zu erkennen, Grenzen gesetzt. Nur eine relativ kleine Menge der echten Knoten lässt eine nicht-triviale Färbung überhaupt zu. Man überzeugt sich zum Beispiel durch Probieren, dass es für Knoten von Figur 5 keine nicht-triviale Färbung gibt – trotzdem ist er echt. Man kann das Verfahren verbessern, indem man mehr Farben verwendet – aber auch das führt noch nicht zu einem Algorithmus, echte Knoten zu erkennen.^{12/13} ♦

Literatur

- ^{11/} K. Reidemeister: Elementare Begründung der Knotentheorie, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 24–32.
- ^{12/} G. Burde: Knoten, Jahrbuch Überblicke Mathematik 1978, 131–147.
- ^{13/} G. Burde: Die beiden Kleeblattschlingen, Didaktik d. Math. (1993), 21 Heft 4, 250–264.

6 Drei echte Knoten mit nicht-trivialer zulässiger Färbung

